Online - Team Wettbewerb 2018

des Mathe-Treffs
der Bezirksregierung Düsseldorf

Lösungen für die gymnasiale Oberstufe (EF,Q1,Q2)

1. Aufgabe (Flucht aus dem Gefängnis):

a)

Zeichen: * ☼ △

Folgende Kombinationen sind möglich:

*** - **☼ - **△ - *☼* - *△* - ☼** - △** -

☼☼☼ - ☼☼* - ☼☼△ - ☼*☼ - ☼△☼ - *☼☼ - △☼☼ -

△△△ - △△☼ - △*△ - △☼△ - △△* - ☼△△ - *△△ -

*△☼ - *☼△ - △☼* - △*☼ - ☼*△ - ☼△*

Man muss 27 Kombinationen ausprobieren bis man sicher aus der Zelle herauskommt.

b)

Zeichen: * ☼ △ #

*** - **☼ - **△ - **# - *☼* - *△* - *#* - ☼** - △** - #** -

☼☼☼ - ☼☼* - ☼☼△ - ☼☼# - ☼*☼ - ☼△☼ - ☼#☼ - *☼☼ - △☼☼ - #☼☼

- △△△ - △△☼ - △△* - △△# - △☼△ - △*△ - △#△ - ☼△△ - *△△ -

#△△ - ### - ##* - ##△ - ##☼ - #*# - #△# - #☼# - *## - △## - ☼## -

*△☼ - *☼△ - △☼* - △*☼ - ☼*△ - ☼△* - *☼# - *#☼ - ☼#* - ☼*# - #☼*

- #*☼ - *△# - *#△ - #*△ - #△* - △*# - △#* - ☼#△ - ☼△# - △#☼ -

△☼# - #△☼ - #☼△

Es gibt insgesamt 64 Kombinationen.

64-27=37

Wenn ein viertes Symbol pro Ring dazukommt, muss man 37 Kombinationen mehr ausprobieren bis man sicher aus der Zelle herauskommt.

c)

Auf dem Schild steht:

NORD GANG OBEN LINKS

Die Ziffer 7 steht für das N, die Ziffer 6 für das O, die Ziffer 4 steht für das E und die Ziffer 1 für das L.

Kontrolle:

LEON + OLNE = NOEL

1467 + 6174 = 7641

d)
Es gilt wie immer gleiche Buchstaben stehen für gleiche Ziffern, unterschiedliche Buchstaben stehen für unterschiedliche Ziffern.

Fall 1: ***RST+RST = USU***

Systematisches Probieren liefert für T= 1, 2, 3, 4 nur S = 0 und U = 2, 4, 6, 8. Da es hier keinen Übertrag gibt, kann R auch nur die gleichen Werte wie T annehmen, was zu einem Widerspruch führt. T = 0 würde S = 0 und U = 0 folgern, was nicht erlaubt ist.
Lässt man einen Übertrag für T zu, so kann T die Werte 5, 6, 7, 8, 9 annehmen.
Für T = 5 folgt U = 0, was sinnlos wäre.
Für T = 6, 7, 8 folgt S = 9, weil 9+9+1=19 ist. Dies führt immer zu einem Widerspruch, da U einerseits wegen T + T = U eine gerade Zahl sein muss und andererseits wegen U = R + R + 1 (der Übertrag der 19) eine ungerade Zahl sein muss.
Es gibt also für den Fall RST+RST = USU keine Lösung.

Fall 2: ***ABC+ABC = BCD***

Folgende Codes sind möglich:

A	B	C		ABC	ABC+ABC	BCD	D
1	2	4		124	248	248	8
1	2	5		125	250	250	0
2	4	9		249	498	498	8
3	7	4		374	748	748	8
3	7	5		375	750	750	0

Die entsprechenden Lösungen ermittelt man zeitsparend durch ein Tabellenkalkulationsprogramm.

e)

Wir schreiben das Kryptogramm in der Form
1000a+100n+10n+e+100f+10i+t+100u+10r+i=10000t+1000r+100a+10u+m
wobei a, n, e, f, m, i, t, u, r die Ziffern 0 bis 9 annehme können. Es ist klar, dass a, f, u, t nicht die Ziffer 0 annehmen können.

Da die Summe von einer vierstelligen und zwei dreistelligen Zahlen maximal gleich 11997 ist, muss t = 1 sein. Das bedeutet wiederum, das r entweder gleich 0 oder gleich 1 ist. Da aber bereits t = 1 ist, muss r = 0 sein. Die restlichen Ziffern ermittelt man zeitsparend durch ein Tabellenkalkulationsprogramm. Eine Lösung, bei dem die nur die Ziffern von 0 bis 9 verwendet werden ist folgende:

ANNE + FIT + URI = TRAUM

9664 + 521 + 802 = 10987

f)

M muss mindestens gleich 3 sein, da 3000 mal 2999 noch siebenstellig ist. UHLTREFF ist jedoch achtstellig.

Die letzten beiden Ziffern des Produkts müssen gleich sein; nur die Zehner- und Einerziffern der Faktoren beeinflussen diese Stellen. Hierzu kann man mit dem Taschenrechner schnell herausfinden, dass es nur sechs Fälle gibt; denn TH im Faktor MATH bedeutet zwei verschiedene Ziffern: TH = 25, 34, 42, 59, 67 oder 76. Folglich bedeutet FF also 00 oder 22.

Bzgl. TH = 25 können A und M die Ziffern 3, 4, 6, 7, 8 oder 9 annehmen und A zusätzlich die Ziffer 1. Alle daraus resultierenden Produkte ergeben aber keine Übereinstimmung mit U5L2RE00.

Bzgl. TH = 34 können A und M die Ziffern 5, 6, 7, 8, 9 annehmen und A zusätzlich die Ziffern 1 und 0. Eine der sich daraus ergebenden Varianten (MATH=8034) führt zu einer Übereinstimmung mit U4L3RE22. Die ergibt für UHLTREFF 64537122.
Sie müssen also 64537122 Gramm auflegen.

TH = 42 entfällt, weil FF die Ziffern 22 hätte, dies wäre aber ein Widerspruch

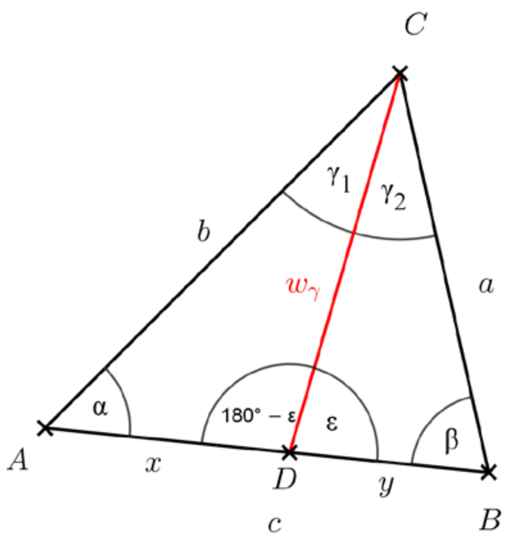
Bzgl. TH = 59 können A und M die Ziffern 3, 4, 6, 7, 8, 9 annehmen und A zusätzlich die Ziffern 1 und 0. Es ergibt sich keine Übereinstimmung mit U9L5RE22.

Bzgl. TH = 67 können A und M die Ziffern 3, 4, 5, 8 und 9 annehmen und A zusätzlich die Ziffern 0 und 1. Es ergibt sich keine Übereinstimmung mit U7L6RE22.

Bzgl. TH = 76 können A und M die Ziffern 3, 4, 5, 8 und 9 annehmen und A zusätzlich die Ziffern 1 und 2. Es ergibt sich keine Übereinstimmung mit U6L7RE00.

Man muss also 64537122 Gramm auflegen.

2. Aufgabe (Ein Dreieck der Liebe):



Wir zeichnen ein beliebiges Dreieck *ABC* mit den üblichen Bezeichnungen (siehe Bild).
Dabei sei die Seite *c* die Grundseite und *D* der Punkt, welche die Seite *c* in zwei Teile teilt, die die Längen *x* und *y* haben, wobei *x* + *y* = *c* gelten muss.
Auch gilt (wegen der Spitzwinkligkeit):

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma \text{ und } \gamma_1 < 90° \text{ und } \gamma_2 < 90° \qquad (1).$$

Weiterhin sollen nach Aufgabenstellung die Produkte $a \cdot x = b \cdot y$ gleich sein.
Aus der obigen Voraussetzung $a \cdot x = b \cdot y$ folgt
Unmittelbar, dass auch $\frac{a}{y} = \frac{b}{x} \qquad (2)$
gelten muss.

Wenn Seitenverhältnisse in einem Dreieck gleich sein sollen,
so könnte der Sinussatz zum Ziel führen. Für das Dreieck *DBC* lautet der Sinussatz:

$$\frac{\sin\varepsilon}{a} = \frac{\sin\gamma_2}{y} \Leftrightarrow \frac{a}{y} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\gamma_2} \qquad (3)$$

Für das Dreieck *ADC* lautet der Sinussatz:

$\frac{\sin(180° - \varepsilon)}{b} = \frac{sin\gamma_1}{x} \Leftrightarrow \frac{b}{x} = \frac{\sin(180° - \varepsilon)}{sin\gamma_1}$ (4)

Wegen (2), (3) und (4) und wegen $sin\,\varepsilon = sin(180° - \varepsilon)$ folgt:

$\frac{sin\,\varepsilon}{sin\,\gamma_1} = \frac{sin\,\varepsilon}{sin\,\gamma_2} \Leftrightarrow sin\,\gamma_1 = sin\,\gamma_2 \Leftrightarrow \gamma_1 = \gamma_2$. Wegen (1) folgt daraus, das $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{\gamma}{2}$ ist.

Deshalb muss die Strecke $\overline{CD}$ die Winkelhalbierende des Winkels γ sein.
Roland muss also nur die Winkelhalbierende des Winkels γ einzeichnen und der Schnittpunkt *D* der Winkelhalbierende mit der Seite *c* teilt die Seite *c* so in zwei Teile *x* und *y*, dass die geforderten Bedingungen erfüllt sind.

Aufgabe 3 (Carsharing):

TL=Tank leer
nTL= nicht Tank leer

P(TL bei Amelie)=0,1
P(nTL bei Amelie)=1-0,1=0,9
P(TL bei Bernd)=0,15
P(nTL bei Bernd)=1-0,15=0,85
P(TL bei Christian)=0,2
P(nTL bei Christian)= 1-0,2=0,8

P(Amelie)=0,5
P(Bernd)=0,2
P(Christian)=0,3

		0,1	TL	$P(Amelie \cap TL) = 0{,}5 \cdot 0{,}1 =$	0,05
0,5	Amelie	0,9	nTL	$P(Amelie \cap nTL) = 0{,}5 \cdot 0{,}9 =$	0,45
		0,15	TL	$P(Bernd \cap TL) = 0{,}2 \cdot 0{,}15 =$	0,03
0,2	Bernd	0,85	nTL	$P(Bernd \cap nTL) = 0{,}2 \cdot 0{,}85 =$	0,17
		0,2	TL	$P(Christian \cap TL) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 =$	0,06
0,3	Christian	0,8	nTL	$P(Christian \cap nTL) = 0{,}3 \cdot 0{,}8 =$	0,24

					1
		0,35714286	Amelie	$P(Amelie \cap TL) =$	0,05
0,14	TL	0,21428571	Bernd	$P(Bernd \cap TL) =$	0,03
		0,42857143	Christian	$P(Christian \cap TL) =$	0,06
		0,52325581	Amelie	$P(Amelie \cap nTL) =$	0,45
0,86	nTL	0,19767442	Bernd	$P(Bernd \cap nTL) =$	0,17
		0,27906977	Christian	$P(Christian \cap nTL) =$	0,24

$$P(TL) = P(Amelie \cap TL) + P(Bernd \cap TL) + P(Christian \cap TL) = 0{,}05 + 0{,}03 + 0{,}06$$
$$= 0{,}14$$

$$P(TL|Amelie) = \frac{0{,}05}{0{,}14} = 0{,}0{,}35714286$$

$$P(TL|Bernd) = \frac{0{,}03}{0{,}14} = 0{,}21428571$$

$$P(TL|Christian) = \frac{0{,}06}{0{,}14} = 0{,}42857143$$

Aus diesem Grund ist Christian mit größter Wahrscheinlichkeit gefahren.

Aufgabe 4 (Vier Hufe für ein Pferd)

Hierbei handelt es sich um unsere sog. Scherzaufgabe. Es gibt keine eindeutige Lösung. Die Bewertung erfolgt nach Kreativität im Lösungsansatz.

Pferd treibt Mühle an
Pferd ist in einer Kirmesarena
Pferd läuft auf einer Pferderennbahn
…

Weitere kreative Lösungen sind möglich und durchaus gewünscht.